2004

www.matematikce.com

Diferensiyel Denklemler I
Uygulama Notları

Mustafa Özdemir

İçindekiler

Temel Bilgiler 2
Tam Diferensiyel Denklemler 4
Ayrılabilir Diferensiyel Denklemler 7
Homojen Difernsiyel Denklemler 13
Lineer Diferensiyel Denklemler 17
Bernoulli Diferensiyel Denklemler 19
İntegrasyon Çarpanının Belirlenmesi 23
İki değişkenli lineer katsayılı diferensiyel denklemlerin çözümü 27
Riccati Diferensiyel Denklemi 31
Eğri Ailelerinin yörüngelerinin Denkleminin bulunması 34
Clairaut Diferensiyel Denklemleri 37

Diferensiyel Denklemlerle İlgili Temel Bilgiler

Soru 1 : **Aşağıdaki diferensiyel denklemlerin adi-kısmi olup olmadığını, mertebesini, lineer olup olmadığını, lineer is katsayısının türünü belirtiniz.**

a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + x^3y - xe^x = 0$

b) $\dfrac{d^3y}{dx^3} + 2\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - 2y = 0$

c) $\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^3 = \sqrt{\dfrac{d^2r}{d\theta^2} + 1}$

d) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1$

e) $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^3 y}{\partial z^3} + x \sin y = 0$

f) $\dfrac{d^4y}{dx^4} + 3\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^5 + 5y = 0$

g) $\dfrac{dr}{d\theta} = \sqrt{r\theta}$

h) $y'' + xy = \sin y''$

i) $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial y}{\partial z} + y \sin x = 0$

Çözüm :

a) 2.mertebeden, değişken katsayılı lineer adi diferensiyel denklem.

b) 3.mertebeden,sabit katsayılı lineer adi diferensiyel denklem.

c) 2.mertebeden, lineer olmayan adi diferensiyel denklem.

d) 2.mertebeden, sabit katsayılı lineer kısmi diferensiyel denklem.

e) 3.mertebeden, lineer olmayan kısmi diferensiyel denklem.

f) 4.mertebeden, lineer olmayan adi diferensiyel denklem.

g) 1.mertebeden, lineer olmayan adi diferensiyel denklem.

h) 2.mertebeden, lineer olmayan adi diferensiyel denklem.

i) 2.mertebeden, değişken katsayılı lineer kısmi diferensiyel denklem.

Soru 1 : $(y - c_1)^2 + (x - c_2)^2 = 1$ **denklemindeki sabitleri yok ederek diferensiyel denklem oluşturunuz.**

Çözüm : Denklemin x değişkenine göre iki kez türevini alalım.

$$2(y - c_1)y' + 2(x - c_2) = 0$$
$$2y'y' + 2(y - c_1)y'' + 2 = 0$$

olur. Son denklemden c_1 sabitini yalnız bırakırsak,

$$c_1 = \frac{1 + (y')^2 + yy''}{y''}$$

olur. Bu ifadeyi birinci türevde yerine yazıp c_2 yi bulalım. $2\left(y-\dfrac{1+(y')^2+yy''}{y''}\right)y'+2\left(x-c_2\right)=0$ eşitliğinden

$$c_2=\frac{-y'-(y')^3+xy''}{y''}$$

bulunur. c_1 ve c_2 sabitlerini ilk denklemde yerine yazalım.

$$\left(y-\frac{1+(y')^2+yy''}{y''}\right)^2+\left(x-\frac{-y'-(y')^3+xy''}{y''}\right)^2=1$$

eşitliğinde gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\left(1+(y')^2\right)^2+\left(y'+(y')^3\right)^2=y''$$

diferensiyel denklemi elde edilir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki denklemlerdeki sabitleri yok ederek diferensiyel denklem oluşturunuz.

a) $y=c_1e^{-2x}+c_2e^{3x}$
b) $(x-c)^2+y^2=c^2$
c) $y^2=4cx$
d) $y=x^2+c_1e^x+c_2e^{3x}$
e) $y=c_1e^{2x}\cos 3x+c_2e^{2x}\sin 3x$

Cevaplar :

a) $y''-y'-6y=0$
b) $\left(x^2-y^2\right)dx+2xydy=0$
c) $2xdy-ydx=0$
d) $y''-5y'+6y=6x^2-10x+2$
e) $y''-4y'+13y=0$

Tam Diferensiyel Denklemler

Soru 1 : $2xydx + \left(x^2 + \cos y\right) dy = 0$ **diferensiyel denklemini çözünüz.**

Çözüm : $M = 2xy$ ve $N = x^2 + \cos y$ olduğundan, $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 2x = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan denklem bir tam diferensiyel denklemdir. Dolayısıyla öyle bir $U(x,y)$ fonksiyonu vardır ki, $M = \dfrac{\partial U}{\partial x} = 2xy$ ve $N = \dfrac{\partial U}{\partial y} = x^2 + \cos y$ 'dir.

$\dfrac{\partial U}{\partial x} = 2xy$ eşitliğini x değişkenine göre integre edersek, $U(x,y) = x^2 y + \varphi(y)$ elde edilir. Ayrıca, $\dfrac{\partial U}{\partial y} = x^2 + \varphi'(y) = x^2 + \cos y$ eşitliğinden $\varphi'(y) = \cos y$ ve $\varphi(y) = \sin y + c_1$ elde edilir. Böylece, $U(x,y) = x^2 y + \sin y + c_1 = c_2$ ve istenen genel çözüm $x^2 y + \sin y = c$ olarak bulunur.

Soru 2 : $\left.\begin{array}{c} y' = \dfrac{xy^2 - 1}{1 - x^2 y} \\ y(0) = 1 \end{array}\right\}$ **diferensiyel denklemini çözünüz.**

Çözüm : Denklem düzenlenirse

$$\left(xy^2 - 1\right) dx + \left(x^2 y - 1\right) dy = 0$$

olur. Buradan, $M = \left(xy^2 - 1\right)$ ve $N = \left(x^2 y - 1\right)$ için,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial N}{\partial x}$$

olduğundan denklem bir tam diferensiyel denklemdir. Dolayısıyla öyle bir $U(x,y)$ fonksiyonu vardır ki,

$$M = \frac{\partial U}{\partial x} = \left(xy^2 - 1\right) \text{ ve } N = \frac{\partial U}{\partial y} = \left(x^2 y - 1\right)$$

'dir. $\dfrac{\partial U}{\partial x} = \left(xy^2 - 1\right)$ eşitliği x 'e göre integre edilirse,

$$\int \frac{\partial U}{\partial x} dx = \int \left(xy^2 - 1\right) dx$$

ve $U(x,y) = \dfrac{x^2 y^2}{2} - x + \varphi(y) = c$ bulunur.

Ayrıca, $N = \dfrac{\partial U}{\partial y} = \left(x^2 y - 1\right)$ olduğu göz önüne alınırsa, $yx^2 + \varphi'(y) = yx^2 - 1$ eşitliğinden, $\varphi'(y) = -1$ ve $\varphi(y) = -y + c$ bulunur. Böylece,

$$U(x,y) = \frac{x^2 y^2}{2} - x - y = c$$

elde edilir. $y(0) = 1$ 'den $x = 0$ ve $y = 1$ yerine yazılırsa, $c = -1$ bulunur. O halde denklemin çözümü

$$\frac{x^2y^2}{2} - x - y + 1 = 0$$

olur.

Soru 3: $\left.\begin{array}{c} \dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{r^2 \sin\theta}{2r\cos\theta - 1} \\ \theta(2) = \pi \end{array}\right\}$ **diferensiyel denklemini çözünüz.**

Çözüm: $(2r\cos\theta - 1)\,dr - \left(r^2 \sin\theta\right) d\theta = 0$ denkleminde $M = (2r\cos\theta - 1)$ ve $N = -\left(r^2 \sin\theta\right)$ için

$$, \frac{\partial M}{\partial \theta} = -2r\sin\theta = \frac{\partial N}{\partial r}$$

olduğundan denklem bir tam diferensiyel denklemdir. Dolayısıyla öyle bir $U(r,\theta)$ fonksiyonu vardır ki,

$$M = \frac{\partial U}{\partial r} = (2r\cos\theta - 1) \text{ ve } N = \frac{\partial U}{\partial \theta} = -\left(r^2\sin\theta\right)$$

'dir. $\dfrac{\partial U}{\partial r} = (2r\cos\theta - 1)$ eşitliğini r 'ye göre integre edersek,

$$\int \frac{\partial U}{\partial r} dr = \int (2r\cos\theta - 1)\,dr \text{ ve } U(r,\theta) = r^2\cos\theta - r + \varphi(\theta) = c$$

bulunur. Ayrıca, $N = \dfrac{\partial U}{\partial \theta} = -\left(r^2\sin\theta\right)$ olduğu göz önüne alınırsa, $-r^2\sin\theta + \varphi'(\theta) = -\left(r^2\sin\theta\right)$ eşitliğinden, $\varphi'(\theta) = 0$ ve $\varphi(\theta) = c$ bulunur. Böylece,

$$U(r,\theta) = r^2\cos\theta - r = c$$

elde edilir. $\theta(2) = \pi$ 'den $r = 2$ ve $\theta = \pi$ yerine yazılırsa, $c = -4 - 2 = -6$ bulunur. O halde denklemin çözümü

$$r^2\cos\theta - r + 6 = 0$$

olur.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki tam diferensiyel denklemleri çözünüz

a) $3x(xy-2)\,dx + \left(x^3 + 2y\right) dy = 0$
b) $\left(2x^3 - xy^2 - 2y + 3\right) dx - \left(x^2y + 2x\right) dy = 0$
c) $(2xy - y)\,dx + \left(x^2 + x\right) dy = 0$

d) $[2x + y\cos(xy)]\,dx + x\cos(xy)\,dy = 0$

e) $(r + \sin\theta - \cos\theta)\,dr + r(\cos\theta + \sin\theta)\,d\theta = 0$

f) $\left[2xy\cos\left(x^2\right) - 2xy + 1\right]dx + \left[\sin\left(x^2\right) - x^2\right]dy = 0$

g) $\left(\sin\theta - 2r\cos^2\theta\right)dr + r\cos\theta\,(2r\sin\theta + 1)\,d\theta = 0$

h) $(2xy - \tan y)\,dx + \left(x^2 - x\sec^2 y\right)dy = 0$

i) $\left(w^2 + wz^2 - z\right)dw + \left(z^3 + w^2 z - w\right)dz = 0$

j)

Cevaplar :

a)$x^3y - 3x^2 + y^2 = c$

b) $x^4 - x^2y^2 - 4xy + 6x = c$

c) $y(x+1)^3 = cx$

d) $\mathrm{x}^2 + \sin(xy) = c$

e) $r^2 + 2r(\sin\theta - \cos\theta) = c$

f) $y\left[\sin\left(x^2\right) - x^2\right] = c - x$

g) $r\sin\theta - r^2\cos^2\theta = c$

h) $x^2y - x\tan y = c$

i) $\left(w^2 + z^2\right)^2 = 4wz + c$

Ayrılabilir Diferensiyel Denklemler

Soru 1 : $\cos y \dfrac{dy}{dx} + 2x - 2x \sin y = 0$ **diferensiyel denklemini çözünüz.**

Çözüm : $\cos y \dfrac{dy}{dx} + 2x\left(1 - \sin y\right) = 0$ denkleminin her tarafını $\cos y$ ile bölersek,

$$\frac{dy}{dx} = -2x \frac{(1 - \sin y)}{\cos y}$$

ve düzenlersek

$$\frac{\cos y}{1 - \sin y} dy + 2x dx = 0$$

ayrılabilir dif. denklemi elde edilir. Buradan,

$$-\ln|1 - \sin y| + x^2 + c = 0$$

eşitliğinden

$$1 - \sin y = e^{x^2 + c}$$

bulunur.

Soru 2 : $(xy + 2x + y + 2)\, dx + \left(x^2 + x\right) dy = 0$ **diferensiyel denklemini çözünüz.**

Çözüm : Katsayıları çarpanlarına ayırırsak, $(x+1)(y+2)\, dx + (x+1)\, x dy = 0$ elde edilir. Buradan, aynı değişkeni içeren ifadeleri bir araya getirmek için her tarafı $(y+2)(x(x+1))$ ile bölersek,

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y+2} = 0$$

elde edilir. Bu denklemin integre edilmesiyle $\ln|x| + \ln|y+2| = \ln c$ veya $x(y+2) = c$ bulunur.

Soru 3 : $\dfrac{dy}{dx} = (x + y + 1)^2$ **diferensiyel denklemini çözünüz.**

Çözüm : $x + y + 1 = u$ ve $1 + \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dx}$ dönüşümü ile denklem $\dfrac{du}{dx} = u^2 + 1$ olur. Bu ayrılabilir diferensiyel denklemdir. $\dfrac{1}{u^2+1} du = dx$ 'in integre edilmesiyle $\arctan u = x + c$ ve buradan $\arctan(x + y + 1) = x + c$ veya $\tan(x + c) = x + y + 1$ elde edilir.

Soru 4 : $\sin x \cos y dx + \cos x \sin y dy = 0$ **diferensiyel denklemini çözünüz.**

Çözüm 4 : Bu denklemin bir tam diferensiyel denklem olduğu görülerek çözülebilir. Fakat, aynı zamanda bu denklem bir değişkenlerine ayrılabilir diferensiyel denklemdir. Gerçekten her tarafı $\cos x \cos y$ ile bölersek,

$$\frac{\sin x}{\cos x}dx + \frac{\sin y}{\cos y}dy = 0$$

elde edilir. Bu denklemin integre edilmesiyle $-\ln|\cos x| - \ln|\cos y| = -\ln|c|$ veya $\cos x \cos y = c$ elde edilir.

Soru 5 : $y' = \sqrt{2x+y+1}$ **diferensiyel denklemini çözünüz.**

Çözüm 5 : $2x+y+1 = u$, $2+\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$ dönüşümü ile, $\frac{du}{dx}-2 = 2\sqrt{u}$ veya $\frac{du}{dx} = 2\left(\sqrt{u}+1\right)$ elde edilir. Bu değişkenlerine ayrılabilen bir diferensiyel denklemdir. $\int \frac{1}{\sqrt{u}+1}du = \int 2dx$ integralini hesaplayalım. Bunun için $\sqrt{u}+1 = z$, $\frac{1}{2\sqrt{u}}du = dz$ dönüşümünü uygulayalım. Buradan,

$$\int \frac{1}{\sqrt{u}+1}du = 2\int \frac{z-1}{z}dz = 2\int \left(1-\frac{1}{z}\right)dz = 2\left(z-\ln z\right)$$

olduğu görülebilir. O halde, $2\left(z-\ln z\right) = 2x+c$ eşitliğinde $z = \sqrt{2x+y+1}+1$ yerine yazılırsa,

$$2\left(\sqrt{2x+y+1}+1-\ln\left(\sqrt{2x+y+1}+1\right)\right) = 2x+c$$

elde edilir.

Soru 6 : $y' = \cos\left(x+y\right)$ **diferensiyel denklemini çözünüz.**

Çözüm 6 : $x+y = u$, $1+\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$ dönüşümü ile, $\frac{du}{dx}-1 = \cos u$ değişkenlerine ayrılabilen diferensiyel denklem elde edilir. Buradan,

$$\int \frac{du}{1+\cos u} = \int dx$$

eşitliğinden, $\int \frac{du}{1+\cos u} = x+c$ bulunur. Şimdi, $\int \frac{du}{1+\cos u}$ integralini hesaplayalım, bunun için $\cos u = 2\cos^2\frac{u}{2}-1$ özdeşliğini kullanırsak, $\int \frac{du}{1+\cos u} = \int \frac{du}{2\cos^2\frac{u}{2}}$ ve $\frac{u}{2} = v$ dönüşümü ile

$$\int \frac{du}{2\cos^2\frac{u}{2}} = \int \frac{dv}{\cos^2 v} = \tan v$$

olur.

Böylece, $\tan v = x+c$ veya $\tan\frac{x+y}{2} = x+c$ elde edilir.

Soru 7 : $y' = \tan\left(x+y\right)$ **diferensiyel denklemini çözünüz.**

Çözüm : $x+y = u$, $1+\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$ dönüşümü ile denklemimiz

$$\frac{du}{dx}-1=\tan u$$

olur. Buradan

$$\frac{du}{\tan u+1}=dx$$

ve

$$x+c=\int\frac{du}{\tan u+1}$$

bulunur .Sağ tarafın integrali

$$\tan u=v\ ,\ \left(1+\tan^2 u\right)du=dv$$

dönüşümü ile

$$\int\frac{du}{\tan u+1}=\int\frac{dv}{(v+1)\left(v^2+1\right)}$$

olur.

$$\frac{A}{v+1}+\frac{Bv+C}{v^2+1}=\frac{1}{(v+1)\left(v^2+1\right)}$$

ifadesinden $A=1/2$, $B=-1/2$ ve $C=1/2$ bulunur. Böylece,

$$x+c=\frac{1}{2}\int\frac{dv}{v+1}-\frac{1}{2}\int\frac{v-1}{v^2+1}dv=\frac{1}{2}\ln(v+1)-\frac{1}{4}\int\frac{2vdv}{v^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dv}{v^2+1}$$
$$x+c=\frac{1}{2}\ln(v+1)-\frac{1}{4}\ln\left(v^2+1\right)+\frac{1}{2}\arctan v$$

ve $v=\tan(x+y)$ ifadesini yerine yazarak

$$x+c=\frac{1}{2}\ln(\tan(x+y)+1)-\frac{1}{4}\ln\left(\tan^2(x+y)+1\right)+\frac{1}{2}\arctan(\tan(x+y))$$

genel çözümü bulunur.

Soru 8: $\frac{dy}{dx}=\frac{y\left(y^2-x^2-1\right)}{x\left(y^2-x^2+1\right)}$ **diferensiyel denklemini** $x=r\cos\theta$ **ve** $y=r\sin\theta$ **dönüşümü yaparak çözünüz.**

Çözüm: $x=r\cos\theta$ ve $y=r\sin\theta$ ifadelerinin diferensiyelini alırsak

$$dx=\cos\theta dr-r\sin\theta d\theta$$
$$dy=\sin\theta dr+r\cos\theta d\theta$$

olur. Bunları denklemde yerine yazalım.

$$\frac{\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta}{\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta} = \frac{r\sin\theta\left((r\sin\theta)^2 - (r\cos\theta)^2 - 1\right)}{r\cos\theta\left((r\sin\theta)^2 - (r\cos\theta)^2 + 1\right)}$$

sadeleştirmeler yapılırsa

$$\frac{\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta}{\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta} = \frac{\sin\theta\left(r^2\cos 2\theta + 1\right)}{\cos\theta\left(r^2\cos 2\theta - 1\right)}$$

ve buradan

$$(\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta)\cos\theta\left(r^2\cos 2\theta - 1\right) = \sin\theta\left(r^2\cos 2\theta + 1\right)(\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta):$$

çarpımından

$$\begin{gathered}\sin\theta r^2\cos\theta\cos 2\theta dr + r^3\cos\theta\cos 2\theta\cos\theta d\theta - \cos\theta\sin\theta dr - r\cos^2\theta d\theta \\ = r^2\sin\theta\cos 2\theta\cos\theta dr + \sin\theta\cos\theta dr - r^3\sin\theta\cos 2\theta r\sin\theta d\theta - r\sin^2\theta d\theta\end{gathered}$$

ve buradan

$$-\sin 2\theta dr + \left(r^3 - r\right)\cos 2\theta d\theta = 0$$

değişkenlerine ayrılabilir diferensiyel denklemi elde edilir. O halde,

$$\frac{2dr}{r^3 - r} = 2\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta}d\theta$$

eşitliğinin intergarsyonu ile,

$$\ln|c| + \ln|\sin 2\theta| = -2\int\frac{dr}{r} + \int\frac{dr}{r-1} + \int\frac{dr}{r+1}$$

'den

$$\ln|c\sin 2\theta| = \ln\left|\frac{r^2 - 1}{r^2}\right|$$

veya

$$c\sin 2\theta = \frac{r^2 - 1}{r^2}$$

bulunur. $c2r\sin\theta r\cos\theta = r^2 - 1$ denkleminden $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ ve $r^2 = x^2 + y^2$ olduğundan,

$$c2xy = x^2 + y^2 - 1$$

genel çözümü elde edilir.

Soru 9 : $y(1+xy)\,dx + x(1-xy)\,dy = 0$ **diferensiyel denklemini çözünüz.**
Çözüm : $xy = u$, $xdy + ydx = du$ dönüşümü uygulayalım. Bu durumda, denklem

$$\frac{u}{x}(1+u)\,dx + x(1-u)\,\frac{xdu - udx}{x^2} = 0$$

haline gelir. Bu denklem düzenlenirse,

$$u(1+u)\,dx + (1-u)(xdu - udx) = 0$$
$$u^2dx + (1-u)\,xdu = 0$$

ayrılabilen diferensiyel denklemi elde edilir. Buradan,

$$\frac{dx}{x} + \frac{1-u}{u^2}du = 0$$
$$\frac{dx}{x} + \frac{du}{u^2} - \frac{du}{u} = 0$$

integralini alırsak,

$$\ln|x| - \frac{1}{u} - \ln|u| = c$$
$$\ln\left|\frac{x}{u}\right| = c + \frac{1}{u}$$
$$\frac{x}{u} = e^{c+\frac{1}{u}}$$
$$\frac{1}{y} = e^{c+\frac{1}{xy}}$$

genel çözümü elde edilir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki değişkenlerine ayrılabilir diferensiyel denklemleri çözünüz.

a) $y' = e^{2x-y}$

b) $2x(y+1)\,dx - ydy = 0,\ \ y(0) = -2$

c) $x^2yy' = e^y$

d) $dr = a(\cos\theta dr + r\sin\theta d\theta)$

e) $ye^{2x}dx = \left(4 + e^{2x}\right)dy$

f) $y\ln x\ln ydx + dy = 0$

g) $(1+\ln x)\,dx + (1+\ln y)\,dy = 0$

h) $\left(e^{2x}+4\right)y' = y$

Cevaplar

a) $2e^y = e^{2x} + c$

b) $x^2 = y - \ln|y+1| + 2$

c) $x\,(y+1) = (1+cx)\,e^y$

d) $r = c\,(1 - a\cos\theta)$

e) $c^2y^2 = 4 + e^{2x}$

f) $x\ln x + \ln|\ln y| = x + c$

g) $x\ln x + y\ln y = c$

h) $y^8\left(1 + 4e^{-2x}\right) = c^2$

Homojen Diferensiyel Denklemler

$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ birinci mertebeden diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Eğer bu denklemi $\dfrac{dy}{dx}+g\left(\dfrac{y}{x}\right)=0$ formunda yazabilirsek bu denklem homojen bir diferensiyel denklemdir. Bu tür denklemleri çözmek için $\dfrac{y}{x}=u$ dönüşümü uygulanarak denklem ayrılabilen diferensiyel denkleme dönüştürülür.

Soru 1: $\left(2x\sinh\dfrac{y}{x}+3y\cosh\dfrac{y}{x}\right)dx-3x\cosh\dfrac{y}{x}dy=0$ **diferensiyel denklemini çözünüz.**

Çözüm: Denklem birinci dereceden homojen bir diferensiyel denklemdir. Denklemin her tarafını x bölelim ve $y=ux$, $dy=xdu+udx$ dönüşümünü uygulayalım.Bu durumda denklem,

$$(2\sinh u+3u\cosh u)\,dx-3\cosh u\,(udx+xdu)=0$$
$$2\sinh u dx-3x\cosh u du=0$$

ayrılabilir diferensiyel denklemine dönüşür.

$$\frac{2}{x}dx-3\frac{\cosh u}{\sinh u}du=0$$

denklemini integre ederek, $2\ln x-3\ln(\sinh u)=\ln c$ veya $x^2=c\sinh^3\dfrac{y}{x}$ bulunur.

Soru 2: $(x-y\ln y+y\ln x)\,dx+x(\ln y-\ln x)\,dy=0$

Çözüm: Denklem düzenlenirse,

$$\left(x+y\ln\frac{x}{y}\right)dx-x\ln\frac{x}{y}dy=0$$

veya

$$\left(\frac{x}{y}+\ln\frac{x}{y}\right)dx-\frac{x}{y}\ln\frac{x}{y}dy=0$$

homojen diferensiyel denklemi elde edilir. $\dfrac{x}{y}=u$, $dx=udy+ydu$ dönüşümü uygulanırsa,

$$(u+\ln u)(udy+ydu)-u\ln udy=0$$
$$u^2dy+y(u+\ln u)\,du=0$$

ayrılabilir diferensiyel denklemi elde edilir.

$$\frac{dy}{y}+\frac{(u+\ln u)}{u^2}du=0$$
$$\int\frac{(u+\ln u)}{u^2}du=\ln|u|+\int\frac{\ln u}{u^2}du$$

son integralde kısmi integrasyon uygulayalım, $\ln u=w$, $\frac{1}{u^2}du=dv$, ve $\frac{1}{u}du=dw$, $\frac{-1}{u}=v$ dönüşümünden

$$\int\frac{\ln u}{u^2}du=wv-\int vdw=-\frac{\ln u}{u}+\int\frac{du}{u^2}=-\frac{\ln u}{u}-\frac{1}{u}$$

olduğundan $\frac{dy}{y}+\frac{(u+\ln u)}{u^2}du=0$ ifadesinin integrasyonundan

$$\ln|y|+\ln|u|-\frac{\ln u}{u}-\frac{1}{u}=c$$

veya $u=\frac{x}{y}$ için

$$x\ln|x|-y\ln\frac{x}{y}=cx+y$$

genel çözümü bulunur.

Soru 3 : $y\sqrt{x^2+y^2}dx-x\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)dy=0$ **diferensiyel denklemini çözünüz.**
Çözüm : Her tarafı x^2 ile bölelim. Bu durumda denklem

$$\frac{y}{x}\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}dx-\left(1+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right)dy=0$$

olur. Bu homojen denklemde, $y=ux$ ve $dy=xdu+udx$ dönüşümüyle

$$u\sqrt{1+u^2}dx-\left(1+\sqrt{1+u^2}\right)(xdu+udx)=0$$

denklemi elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\left(1+\sqrt{1+u^2}\right)xdu+udx=0$$

veya

$$\left(\frac{1}{u}+\frac{\sqrt{1+u^2}}{u}\right)du+\frac{dx}{x}=0$$

olur. $\int \frac{\sqrt{1+u^2}}{u}du$ integralini hesaplayalım. Bunun için, $1+u^2=v^2$, $2udu=2vdv$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{1+u^2}}{u}du &= \int \frac{v^2}{u^2}dv = \int \frac{v^2 dv}{v^2-1} = \int dv + \int \frac{1}{v^2-1}dv \\ &= v + \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{v-1}dv - \int \frac{1}{v+1}dv\right) \\ &= v + \frac{1}{2}\ln\frac{|v-1|}{|v+1|} = \sqrt{1+u^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{\left|\sqrt{1+u^2}-1\right|}{\left|\sqrt{1+u^2}+1\right|}\end{aligned}$$

bulunur. Buna göre, diferensiyel denklemin çözümü

$$\ln u + \sqrt{1+u^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{\left|\sqrt{1+u^2}-1\right|}{\left|\sqrt{1+u^2}+1\right|} = \ln cx$$

ve $\frac{y}{x}=u$ olduğundan,

$$\ln\frac{y}{x} + \frac{1}{x}\sqrt{x^2+y^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{\left|\sqrt{x^2+y^2}-x\right|}{\left|\sqrt{x^2+y^2}+x\right|} = \ln cx$$

bulunur.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki homojen diferensiyel denklemleri çözünüz.

a) $\left(x^2-xy+y^2\right)dx - xydy = 0$

b) $(xy)\,dx + \left(x^2+y^2\right)dy = 0$

c) $(xy)\,dx - \left(x^2+3y^2\right)dy = 0$

d) $(x-y)(4x+y)\,dx + x(5x-y)\,dy = 0$

e) $\left[x\csc\left(\frac{y}{x}\right) - y\right]dx + xdy = 0$

f) $xdy - ydx$-$\sqrt{x^2-y^2}dx = 0$

g) $\left(x^3+y^3\right)dx + 3xy^2dy = 0$

h) $ydx = \left(x+\sqrt{y^2-x^2}\right)dy$

Cevaplar :

a) $(y-x)\,e^{\frac{y}{x}} = c$

b) $y^2\left(2x^2+y^2\right) = c$

c) $x^2 = 6y^2\ln\left|\frac{y}{c}\right|$

d) $x\left(x+y\right)^2 = c\left(y-2x\right)$

e) $\ln\left|\frac{x}{c}\right| = \cos\left(\frac{y}{x}\right)$

f) $cx = e^{\arcsin\frac{y}{x}}$

g) $x^4 + 4xy^3 = c$

h) $\arcsin\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left|\frac{y}{c}\right|$

Lineer Diferensiyel denklemler

$\dfrac{dy}{dx}+P\left(x\right)y=Q\left(x\right)$ formundaki lineer diferensiyel denklemlerde $\eta=e^{\int P(x)dx}$ integrasyon çarpanıdır ve genel çözüm

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q\left(x\right)e^{\int P(x)dx}dx+c\right] \qquad \text{((*L*))}$$

eşitliğiyle hesaplanabilir.

Soru 1 . $y'=\csc x-y\cot x$ **diferensiyel denklemini çözünüz.**
Çözüm : $y'+y\cot x=\csc x$ lineer bir diferensiyel denklemdir. $P\left(x\right)=\cot x$ ve $Q\left(x\right)=\csc x$ ifadeleri (*L*) denkleminde yerine yazarsak,

$$y=e^{-\int \cot x dx}\left[\int \csc x e^{\int \cot x dx}dx+c\right]$$

eşitliğinden $\int \cot x dx=\int \dfrac{\cos x}{\sin x}dx=\ln\left|\sin x\right|$ ve $\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$olduğu gözönüne alnırsa,

$$y=\frac{1}{\sin x}\left[\int \frac{1}{\sin x}\sin x dx+c\right]=\frac{1}{\sin x}\left(x+c\right)$$

bulunur.

Soru 2 : $2x\left(y-x^2\right)dx+dy=0$ **diferensiyel denklemini çözünüz.**
Çözüm : Denklem düzenlenirse, $\dfrac{dy}{dx}+2xy=2x^3$ lineer diferensiyel denklemi elde edilir. $P\left(x\right)=2x$ ve $Q\left(x\right)=2x^3$ ifadelerini $y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q\left(x\right)e^{\int P(x)dx}dx+c\right]$ de yerine yazarsak,

$$y=e^{-\int 2xdx}\left[\int 2x^3e^{\int 2xdx}dx+c\right]=e^{-x^2}\left[\int e^{x^2}2x^3dx+c\right]$$

bulunur. $\int e^{x^2}2x^3dx$ integralini hesaplayalım. Bunun için $x^2=s$, $2xdx=ds$ dönüşümyle $\int e^{x^2}2x^3dx=\int e^s s ds$ elde edilir. Kısmi integrasyon uygularsak, $s=u$, $e^s ds=dv$ den $e^s=v$ ve $ds=du$ eşitliklerini yazarsak,

$$\int udv=uv-\int vdu=se^s-\int e^s ds=se^s-e^s$$

elde edilir. Böylece dif. denklemin çözümü,

$$y=e^{-x^2}\left[x^2e^{x^2}-e^{x^2}+c\right]$$

elde edilir.

Soru 3 : $\left.\begin{array}{c} y^2\dfrac{dx}{dy}+xy=2y^2+1 \\ y(2)=1 \end{array}\right\}$ **diferensiyel denklemini çözünüz.**

Çözüm : Her tarafı y^2 ile bölersek x değişkenine göre lineer $\dfrac{dx}{dy}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{2y^2+1}{y^2}$ diferensiyel denklemi elde edilir. $P(y)=\dfrac{1}{y}$ ve $Q(y)=\dfrac{2y^2+1}{y^2}$ olduğundan,

$$x=e^{-\int \frac{1}{y}dy}\left[\int \frac{2y^2+1}{y^2}e^{\int \frac{1}{y}dy}dy+c\right]$$

$$x=\frac{1}{y}\left[\int \frac{2y^2+1}{y^2}ydy+c\right]$$

$$x=\frac{1}{y}\left[\int\left(2y+\frac{1}{y^2}\right)dy+c\right]=\frac{1}{y}\left(y^2+\ln y+c\right)$$

bulunur. $x=2$ ve $y=1$ yazılırsa, $2=1+0+c$ eşitliğinden $c=1$ bulunur. Böylece dif. denklemin çözümü $yx=y^2+\ln y+1$ olur.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki birinci mertebeden lineer diferensiyel denklemleri çözünüz.

a) $ydx+(3x-xy+2)\,dy=0$

b) $2\left(y-4x^2\right)dx+xdy=0$

c) $y'=x-2y\cot 2x$

d) $n,m\in\mathbb{R}$ olmak üzere $\dfrac{dy}{dx}-my=ne^{mx}$

e) $dy=(x-3y)\,dx$

Cevaplar

a) $xy^3=2y^2+4y+4+ce^y$

b) $x^2y=2x^4+c$

c) $4y\sin 2x=c+\sin 2x-2x\cos 2x$

d) $y=(nx+c)\,e^{mx}$

e) $9y=3x-1+ce^{-3x}$

Bernoulli Diferensiyel Denklemi

Soru 1: $\left(1-x^2\right)y' - xy = axy^2$ $(a \in \mathbb{R})$ **diferensiyel denklemini çözünüz.**
Çözüm : Her tarafı $y^2\left(1-x^2\right)$ ile bölersek,

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} - \frac{x}{1-x^2}y^{-1} = \frac{ax}{1-x^2}$$

Bernoulli diferensiyel denklemi elde edilir. $y^{-1} = u$, $-y^{-2}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dx}$ dönüşümü ile

$$-\frac{du}{dx} - \frac{ux}{1-x^2} = \frac{ax}{1-x^2}$$

veya

$$-\frac{du}{dx} = \frac{x\left(u+a\right)}{1-x^2}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu değişkenlerine ayrılabilir bir dif. denklemdir. Böylece,

$$\frac{du}{u+a} + \frac{x}{1-x^2}dx = 0$$

denkleminin integrasyonu ile

$$\ln|u+a| - \frac{1}{2}\ln\left|1-x^2\right| = \ln c$$

veya

$$\frac{u+a}{\sqrt{1-x^2}} = c$$

olur. $y^{-1} = u$ yerine yazılarak dif. denklemin çözümü $y = \left(c\sqrt{1-x^2} - a\right)^{-1}$ olarak bulunur.

Soru 2 : $\sin y\dfrac{dy}{dx} = \cos y - x\cos^2 y$ **diferensiyel denklemini çözünüz.**

Çözüm : Öncelikle $\cos y = u$, $-\sin y\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dx}$ dönüşümünü uygularsak,
$-\dfrac{du}{dx} = u - xu^2$ veya $\dfrac{du}{dx} + u = xu^2$ bulunur. Bu denklemin her tarafını u^2 ile bölersek,

$$u^{-2}\frac{du}{dx} + u^{-1} = x$$

Bernoulli diferensiyel denklemi elde edilir. O halde $u^{-1} = v$, $-u^{-2}\dfrac{du}{dx} = \dfrac{dv}{dx}$ dönüşümünden,
$\dfrac{dv}{dx} - v = -x$ lineer diferensiyel denklemi elde edilir. Böylece,

$$v = e^{-\int(-1)dx}\left[\int(-x)\,e^{\int(-1)dx}dx + c\right]$$

eşitliğinden

$$v = e^{x}\left(-\int xe^{-x}dx + c\right)$$

$\int xe^{-x}dx$ kısmi integrasyon ile $x = m$, $e^{-x}dx = dn$ ve $dx = dm$, $-e^{-x} = n$ uygulanırsa $\int mdn = mn - \int ndm$ den $\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + e^{-x}$ bulunur. Böylece

$$v = e^{x}\left(xe^{-x} + e^{-x} + c\right)$$

ve $\cos y = u$, $u^{-1} = v$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\cos y = \left(x + 1 + ce^{x}\right)^{-1}$$

elde edilir.

Soru 3 : $2x^2 \cot y \dfrac{dy}{dx} = 5x - 3\sin y$ **diferensiyel denklemini çözünüz.**

Çözüm : $\sin y = u$, $\cos y \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dx}$ dönüşümü uygulanırsa,

$$2x^2\frac{du}{dx} = 5xu - 3u^2$$

elde edilir. Her tarafı $2x^2$ ile bölersek

$$-\frac{du}{dx} + \frac{5xu}{2x^2} = \frac{3u^2}{2x^2}$$

olur. u^2 ile her tarafı bölersek

$$-u^{-2}\frac{du}{dx} + \frac{5}{2x}u^{-1} = \frac{3}{2x^2}$$

Bernoulli diferensiyel denklemi elde edilir. $u^{-1} = v$, $-u^{-2}\dfrac{du}{dx} = \dfrac{dv}{dx}$ dönüşümünden,

$$\frac{dv}{dx} + \frac{5}{2x}v = \frac{3}{2x^2}$$

lineer diferensiyel denklemi elde edilir. Buradan,

$$v=e^{-\int \frac{5}{2x}dx}\left[\int \frac{3}{2x^2}e^{\int \frac{5}{2x}dx}dx+c\right]=e^{\ln|x|^{-5/2}x}\left[\int \frac{3}{2x^2}e^{\ln|x|^{5/2}}dx+c\right]$$

eşitliğinden

$$v=x^{-5/2}\left[\int \frac{3}{2x^2}x^{5/2}dx+c\right]$$
$$v=x^{-5/2}\left[\frac{3}{2}.\frac{2}{3}x^{3/2}+c\right]=x^{-5/2}\left(x^{3/2}+c\right)$$

ve $(\sin y)^{-1}=u^{-1}=v$ den

$$(\sin y)^{-1}=x^{-1}+cx^{-5/2}$$

bulunur.

Soru 4 : $6y^2dx=x\left(2x^3+y\right)dy$ **diferensiyel denklemini çözünüz.**
Çözüm :
$\frac{dx}{dy}=\frac{x\left(2x^3+y\right)}{6y^2}$ eşitliğinden $\frac{dx}{dy}=\frac{x}{6y}+\frac{x^4}{3y^2}$ elde edilir. Her tarafı x^{-4} ile bölerek

$$x^{-4}\frac{dx}{dy}-x^{-3}\frac{1}{6y}=\frac{1}{3y^2}$$

Bernoulli diferensiyel denklemi elde edilir. $x^{-3}=u$, $-3x^{-4}\frac{dx}{dy}=\frac{du}{dy}$ dönüşümüyle

$$-\frac{1}{3}\frac{dy}{dy}-\frac{u}{6y}=\frac{1}{3y^2}$$

veya

$$\frac{dy}{dy}+\frac{u}{2y}=-\frac{1}{y^2}$$

lineer diferensiyel denklemi elde edilir.

$$u=e^{-\int \frac{dy}{2y}}\left[\int -\frac{1}{y^2}e^{\int \frac{dy}{2y}}dy+c\right]$$

eşitliğinden

$$u=y^{-1/2}\left[\int y^{-3/2}dy+c\right]=y^{-1/2}\left[-2y^{-1/2}+c\right]$$

ve $x^{-3} = u$ eşitliğinden

$$x^{-3} = y^{-1/2}\left[-2y^{-1/2} + c\right]$$

bulunur.

Soru 5 : $y' - 2xy = 2xe^{x^2}\sqrt{y}$, $y(0) = 1$ **diferensiyel denklemini çözünüz.**

Soru 6 : $xy' + y = x^2y^2 \sin x$, $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$ **diferensiyel denklemini çözünüz.**

Soru 7 : $yy' + y^2 \cot x = \csc^2 x$ **diferensiyel denklemini çözünüz.**

Çözüm : $y\frac{dy}{dx} + y^2\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin^2 x}$ denklemi bir Bernoulli diferensiyel denklemidir. $y^2 = u$, $2y\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$ dönüşümü ile denklem

$$\frac{du}{dx} + 2u\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sin^2 x}$$

lineer diferensiyel denklemine dönüşür. $P(x) = 2\frac{\cos x}{\sin x}$ ve $Q(x) = \frac{2}{\sin^2 x}$ olduğundan,

$$u = e^{-\int 2\frac{\cos x}{\sin x}dx}\left[\int \frac{2}{\sin^2 x}e^{\int 2\frac{\cos x}{\sin x}dx}dx + c\right]$$

eşitliğinden

$$u = \sin^{-2} x\left[\int 2dx + c\right]$$
$$y^2 \sin^2 x = 2x + c$$

bulunur.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki verilen diferensiyel denklemlerin çözümünü bulunuz.

a) $y' = y - xy^3e^{-2x}$
b) $y' \tan x \sin 2y = \sin^2 x + \cos^2 y$
c) $2x^3y' = y\left(y^2 + 3x^2\right)$
d) $y' = 1 + 6xe^{x-y}$
e) $y\left(6y^2 - x - 1\right)dx + 6y^3dx = 0$

a) $e^{2x} = y^2\left(x^2 + c\right)$
b) $\left(\sin^2 x + 3\cos^2 y\right)\sin x = c$
c) $y^2(c - x) = x^3$
d) $e^{x-y} = 3x^2 + c$
e) $y^2\left(6 + ce^{-x}\right) = x$

İntegrasyon Çarpanının Belirlenmesi

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ diferensiyel denklemi için

a) $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = f(x)$, sadece x 'e bağlı bir fonksiyon ise $\eta = e^{\int f(x)dx}$ bir integrasyon çarpanıdır.

b) $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{M} = -g(y)$, sadece y 'ye bağlı bir fonksiyon ise $\eta = e^{\int g(y)dy}$ bir integrasyon çarpanıdır.

c) $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ denklemi homojen ise $\eta = \dfrac{1}{Mx+Ny}$ bir integrasyon çarpanıdır.

Soru 1: $\left(2xy^4e^y + 2xy^3 + y\right)dx + \left(x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x\right)dy = 0$ **diferensiyel denklemini çözünüz**.

Çözüm: $\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= 8xy^3e^y + 2xy^4e^y + 6xy^2 + 1 \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= 2xy^4e^y - 2xy^2 - 3 \end{aligned}\right\} \dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan tam diferensiyel değil.

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 8xy^3e^y + 8xy^2 + 4$$

ve

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{M} = \frac{4}{y} = -g(y) \text{ (Sadece } y \text{ 'ye bağlı bir fonksiyon)}$$

O halde,

$$\eta = e^{\int g(y)dy} = e^{\int \frac{-4}{y}dy} = e^{-4\ln|y|} = \frac{1}{y^4}$$

integrasyon çarpanıdır. Denklemi $\eta = \dfrac{1}{y^4}$ ile çarpılırsa,

$$\left(2xe^y + 2\frac{x}{y} + \frac{1}{y^3}\right)dx + \left(x^2e^y - \frac{x^2}{y^2} - 3\frac{x}{y^4}\right)dy = 0$$

tam diferensiyel denklemi elde edilir. O halde öyle bir $U(x,y)$ fonksiyonu vardır ki, $\dfrac{\partial U}{\partial x} = M$ 'dir.

$$U(x,y)=\int\left(2xe^y+2\frac{x}{y}+\frac{1}{y^3}\right)dx=x^2e^y+\frac{x^2}{y}+\frac{x}{y^3}+\varphi(y)$$

olduğundan,

$$\frac{\partial U}{\partial y}=x^2e^y-\frac{x^2}{y^2}-3\frac{x}{y^4}+\varphi'(y)=N$$

eşitliğinden $\varphi'(y)=0$ ve $\varphi(y)=c$ bulunur. Dolayısıyla, diferensiyel denklemin çözümü

$$x^2e^y+\frac{x^2}{y}+\frac{x}{y^3}=c$$

bulunur.

Soru 2 : $\left(x^2+y^2+2x\right)dx+2ydy=0$ **diferensiyel denklemini çözünüz**.

Çözüm : $\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial M}{\partial y}=2y\\ \dfrac{\partial N}{\partial x}=0\end{array}\right\}\ \dfrac{\partial M}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan tam diferensiyel değil.

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=2y$$

ve

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=1=f(x)\ \text{(Sadece } x \text{ 'e bağlı bir fonksiyon)}$$

O halde,

$$\eta=e^{\int g(x)dx}=e^{\int dx}=e^x$$

integrasyon çarpanıdır. Denklemi $\eta=e^x$ ile çarpılırsa,

$$e^x\left(x^2+y^2+2x\right)dx+2e^xydy=0$$

tam diferensiyel denklemi elde edilir. O halde öyle bir $U(x,y)$ fonksiyonu vardır ki, $\dfrac{\partial U}{\partial y}=N$ 'dir.

$$U(x,y)=\int 2ye^ydy=y^2e^x+\varphi(x)$$

olduğundan,

$$\frac{\partial U}{\partial x}=y^2e^x+\varphi'(x)=M$$

eşitliğinden

$$\varphi'(x) = e^x\left(x^2+2x\right) \text{ ve } \varphi(x) = \int e^x\left(x^2+2x\right)dx = \underbrace{\int e^x x^2 dx}_{(***)} + \int e^x 2x dx$$

olur. $(***)$ için $x^2 = u$, $2xdx = du$, $e^x dx = dv$ ve $e^x = v$ denilirse,

$$\varphi(x) = \int e^x\left(x^2+2x\right)dx = \int e^x x^2 dx + \int e^x 2xdx = x^2e^x - \int e^x 2xdx + \int e^x 2xdx = x^2e^x$$

bulunur. Dolayısıyla, diferensiyel denklemin çözümü

$$U(x,y) = y^2e^x + x^2e^x = c$$

bulunur.

Soru 3 : $\left(x^2y-2xy\right)dx + \left(3x^2y-x^3\right)dy = 0$ **diferensiyel denklemini çözünüz**.

Çözüm : $\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial M}{\partial y} = x^2-4xy \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = 6xy-3x^2\end{array}\right\}$ $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan tam diferensiyel değil. Ayrıca verilen denklem homojen bir diferensiyel denklemdir. O halde, integrasyon çarpanı

$$\eta = \frac{1}{xM+yN} = \frac{1}{x\left(x^2y-2xy\right)+y\left(3x^2y-x^3\right)} = \frac{1}{x^2y^2}$$

olur. Denklemi integrasyon çarpanı ile çarpıp düzenlersek,

$$\frac{x-2y}{xy}dx + \frac{3y-x}{y^2}dy = 0$$

tam diferensiyel denklemi elde edilir. O halde öyle bir $U(x,y)$ fonksiyonu vardır ki, $\dfrac{\partial U}{\partial x} = M$ 'dir.

$$U(x,y) = \int\left(\frac{x-2y}{xy}\right)dx = \int\left(\frac{1}{y}-\frac{2}{x}\right)dx = \frac{x}{y} - 2\ln|x| + \varphi(y)$$

olduğundan,

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \varphi'(y) = N$$

eşitliğinden $\varphi'(y) = \dfrac{3}{y}$ ve $\varphi(y) = 3\ln|y|$ bulunur. Dolayısıyla, diferensiyel denklemin çözümü

$$\frac{x}{y} - 2\ln|x| + 3\ln|y| = c$$

veya

$$\frac{x}{y} + \ln \frac{y^3}{x^2} = c$$

bulunur.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki diferensiyel denklemler için integrasyon çarpanını bularak, diferensiyel denklemi çözünüz

a) $\left(4xy + 3y^2 - x\right) dx + x\left(x + 2y\right) dy = 0$
b) $y\left(x + y + 1\right) dx + x\left(x + 3y + 2\right) dy = 0$
c) $y\left(x + y\right) dx + \left(x + 2y - 1\right) dy = 0$

a) $\eta = x^2$, $x^3\left(4xy + 4y^2 - x\right) = c$
b) $\eta = y$, $xy^2\left(x + 2y + 2\right) = c$
c) $\eta = e^x$, $y\left(x + y - 1\right) = ce^{-x}$

İki değişkenli Lineer Katsayılı Diferensiyel Denklemlerin Çözümü

Soru 1 :$(x+2y-4)dx-(2x+y-5)dy=0$. **diferensiyel denklemini çözünüz.**

Çözüm : $\left.\begin{array}{r} x+2y-4=0 \\ 2x+y-5=0 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin çözümünden $x=2$ ve $y=1$ bulunur. Dolayısıyla, $x=u+2$ ve $y=v+1$ dönüşümü yapılırsa, diferensiyel denklem $(u+2v)\,du-(2u+v)\,dv=0$ homojen diferensiyel denklemine dönüşür.

O halde, $\dfrac{u}{v}=z$, $du=zdv+vdz$ dönüşümü yaparsak,

$$(z+2)\,(zdv+vdz)-(2z+1)\,dv=0$$

veya düzenlenirse

$$\left(z^2-1\right)dv+v\,(z+2)\,dz=0$$

değişkenlerine ayrılabilir diferensiyel denklem elde edilir. Yani,

$$\frac{dv}{v}+\frac{(z+2)\,dz}{z^2-1}=0$$

olur. Bu denklemi,

$$\frac{dv}{v}+\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+1}=0$$

şeklinde yazarsak, $A+B=1$ ve $A-B=2$ denklemlerinden $A=\dfrac{3}{2}$ ve $B=-\dfrac{1}{2}$ bulunur. O halde integrasyon ile

$$\ln|v|+\frac{3}{2}\ln|z-1|-\frac{1}{2}\ln|z+1|=\ln|c|$$

veya

$$v^2\,(z-1)^3=c\,(z+1)$$

elde edilir. $z=\dfrac{u}{v}=\dfrac{x-2}{y-1}$ yerine yazarsak

$$(x-y-1)^3=c\,(x+y-3)$$

çözümü elde edilir.

Soru 2 : $(2x+3y-1)\,dx+(2x+3y+2)\,dy=0$ **diferensiyel denklemini çözünüz.**

Çözüm : $\left.\begin{array}{r} 2x+3y-1=0 \\ 2x+3y+2=0 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin katsayıları orantılı olduğundan bu doğrular paraleldir ve sistemin çözümü yoktur. Dolayısıyla bir önceki soruda uygulanan dönüşüm uygulanamaz. Burada, $2x+3y=v$, $2dx+3dy=dv$ dönüşümünü uygulanırsa,

$$(v-1)\,dx+(v+2)\left(\frac{dv-2dx}{3}\right)=0$$

veya

$$(v-7)\,dx+(v+2)\,dv=0$$

ayrılabilir diferensiyel denklemi elde edilir.

$$\begin{aligned} dx+\frac{v-7+9}{v-7}dv&=0\\ dx+\left(1+\frac{9}{v-7}\right)dv&=0\\ x+v+9\ln|v-7|&=c_1 \end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$x+y+3\ln|2x+3y-7|=c$$

genel çözümü elde edilir.

Soru 3: $\left(2x^3+3y^2-7\right)3x^2dx-\left(3x^3+2y^2-8\right)ydy=0$ **diferensiyel denklemini çözünüz.**

Çözüm: Öncelikle $x^3=u$ ve $y^2=v$ dönüşümü uygulayalım. Bu durumda denklem

$$(2u+3v-7)\,du-(3u+2v-8)\,dv=0$$

olur. $\left.\begin{array}{l} 2u+3v-7=0\\ 3u+2v-8=0 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin çözümünden, $u=2$ ve $v=1$ bulunur. O halde $u=m+2$ ve $v=n+1$ dönüşümü uygulanırsa,

$$(2m+3n)\,dm-(3m+2n)\,dn=0$$

homojen diferensiyel denklemi elde edilir. $\dfrac{m}{n}=z$ ve $dm=zdn+ndz$ dönüşümünden,

$$(2z+3)\,(zdn+ndz)-(3z+2)\,dn=0$$

veya

$$2\left(z^2-1\right)dn+(2z+3)\,ndz=0$$

ayrılabilir diferensiyel denklemi elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{2}{n}dn+\frac{2z+3}{z^2-1}dz&=0\\ \frac{2}{n}dn-\frac{1}{2}\frac{dz}{z+1}+\frac{5}{2}\frac{dz}{z-1}&=0 \end{aligned}$$

denkleminin integrasyonu ile

$$4\ln|n| - \ln|z+1| + 5\ln|z-1| = \ln|c|$$

bulunur. $z = \dfrac{u-2}{v-1} = \dfrac{x^3-2}{y^2-1}$ yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\left(x^3 - y^2 - 1\right)^5 = c\left(x^3 + y^2 - 3\right)$$

genel çözümü elde edilir.

Soru 4 : $(x - 2\sin y + 3)\,dx - (2x - 4\sin y - 3)\cos y dy = 0$ **diferensiyel denklemini çözünüz.**

Çözüm : $\sin y = u$, $\cos y dy = du$ dönüşümü yapılırsa,

$$(x - 2u + 3)\,dx - (2x - 4u - 3)\,du = 0$$

elde edilir. $\left.\begin{array}{r} x - 2u + 3 = 0 \\ 2x - 4u - 3 = 0 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin katsayıları orantılı olduğundan bu doğrular paraleldir ve sistemin çözümü yoktur. Bu durumda $x - 2u = v$, $1 - 2\dfrac{du}{dx} = \dfrac{dv}{dx}$ dönüşümü uygulayabiliriz. Bu durumda

$$\begin{gathered} (v+3)\,dx - (2v-3)\,du = 0 \\ \frac{2v+6}{2v-3} = 2\frac{du}{dx} = 1 - \frac{dv}{dx} \end{gathered}$$

denkleminden

$$\begin{gathered} \frac{2v-3}{4v+3}dv = dx \\ \left(1 - \frac{9}{4v+3}\right)dv = 2dx \end{gathered}$$

olur. Bu denklemin integrasyonu ile

$$v - \frac{9}{4}\ln|4v+3| = 2x + c_1$$

veya

$$4v - 9\ln|4v+3| = 8x + c$$

olur. Başlangıçta yaptığımız dönşümleri gözönüne alırsak

$$4\,(x - 2\sin y) - 9\ln|4\,(x - 2\sin y) + 3| = 8x + c$$

veya

$$4x + 8\sin y + 9\ln(4x - 8\sin y + 3) = c$$

bulunur.

Soru 5 : $(x - y - 1)\,dx - (x + 4y - 1)\,dy = 0$ **diferensiyel denklemini çözünüz.**
Çözüm :
Soru 6 : $y' = \dfrac{2x + y - 1}{4x + 2y + 5}$ **diferensiyel denklemini çözünüz.**

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki diferensiyel denklemleri çözünüz

a) $(2x - y)\,dx + (4x + y - 6)\,dy = 0$
b) $(x - 4y - 3)\,dx - (x - 6y - 5)\,dy = 0$
c) $(x - y + 2)\,dx + 3dy = 0$
d) $(x + y - 1)\,dx + (2x + 2y + 1)\,dy = 0$
e) $(x - 1)\,dx - (3x - 2y - 5)\,dy = 0,\ y(2) = 1$

a) $(x + y - 3)^2 = c(2x + y - 4)^2$
b) $(x - 2y - 1)^2 = c(x - 3y - 2)$
c) $x + c = 3\ln|x - y + 5|$
d) $x + 2y + c = 3\ln|x + y + 2|$
e) $(2y - x + 3)^2 = 9(y - x + 2)$

Riccati Diferensiyel Denklemi

$y' = A(x)\,y^2 + B(x)\,y + c(x)$ tipindeki diferensiyel denklemlerde y_1 bir özel çözüm verilirse $y = y_1 + \dfrac{1}{v}$ dönüşümü yapılarak genel çözüm bulunur.

Soru 1 : $y' + y^2 - 3y\tan x + \tan^2 x - 1 = 0$ **diferensiyel denkleminin bir özel çözümü** $y = \tan x$ ise genel çözümü bulunuz.

Çözüm : $y = \tan x + \dfrac{1}{v}$ ve $\dfrac{dy}{dx} = \left(1 + \tan^2 x\right) - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{dv}{dx}$ dönüşümünü uygulayalım.Bu durumda denklem

$$\left(1 + \tan^2 x\right) - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} + \tan^2 x + \frac{1}{v^2} + \frac{2}{v}\tan x - 3\tan^2 x - \frac{3}{v}\tan x + \tan^2 x - 1 = 0$$

olur. Sadeleştirmeler yapılırsa,

$$-\frac{1}{v}\frac{dx}{dx} + \frac{1}{v} = \tan x$$

veya

$$\frac{dv}{dx} + v\tan x = 1$$

lineer diferensiyel denklemi elde edilir. $P(x) = \tan x$ ve $Q(x) = 1$ olduğundan,

$$v = e^{-\int \tan x dx}\left[\int e^{\int \tan x dx} dx + c\right] = \sin x\left[\int \frac{dx}{\sin x} + c\right]$$

olur.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x}dx = \int \frac{-du}{1 - u^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{1 - u} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u + 1} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 - u}{1 + u}\right|$$

Buna göre,

$$v = \sin x\left(-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}\right| + c\right) = \frac{1}{y - \tan x}$$

bulunur.

Soru 2 : $y' = y^2\csc^2 x + y\cot x - 1$ **diferensiyel denkleminin bir özel çözümü** $y = \sin x$ ise genel çözümü bulunuz.

Çözüm : $y = \sin x + \dfrac{1}{v}$ ve $\dfrac{dy}{dx} = \cos x - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{dv}{dx}$ dönüşümünü uygulayalım.Bu durumda denklem

$$\cos x - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = \left(\sin^2 x + \frac{1}{v^2} + 2\frac{\sin x}{v}\right)\frac{1}{\sin^2 x} + \left(\sin x + \frac{1}{v}\right)\frac{\cos x}{\sin x} - 1$$

veya

$$\cos x-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}=1+\frac{1}{v^2\sin^2 x}+\frac{2}{v\sin x}+\cos x+\frac{\cos x}{v\sin x}-1$$

olur. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\frac{dv}{dx}+\left(\frac{2+\cos x}{\sin x}\right)v=\frac{-1}{\sin^2 x}$$

lineer diferensiyel denklemi elde edilir.

$$P\left(x\right)=\frac{2+\cos x}{\sin x}\text{ ve }Q\left(x\right)=\frac{-1}{\sin^2 x}$$

olduğundan,

$$e^{-\int\frac{2+\cos x}{\sin x}dx}=e^{-\int\left(\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{2}{\sin x}\right)dx}=e^{-(\ln|\sin x|+\ln|1-\cos x|-\ln|1+\cos x|)}=\frac{\left(1+\cos x\right)^2}{\sin^3 x}$$

bulunur. O halde,

$$v=\frac{\left(1+\cos x\right)^2}{\sin^2 x}\left[\int\frac{-1}{\sin^2 x}\frac{\sin^3 x}{\left(1+\cos x\right)^2}dx+c\right]$$

olur.

$$\int\frac{-\sin x}{\left(1+\cos x\right)^2}dx=\int\frac{dw}{w^2}=\frac{w^{-3}}{-3}=\frac{\left(1+\cos x\right)^{-3}}{-3}\text{ ve }v=\frac{1}{y-\sin x}$$

olduğu gözönüne alınırsa,

$$\frac{1}{y-\sin x}=\frac{\left(1+\cos x\right)^2}{\sin^2 x}\left[\left(\frac{\left(1+\cos x\right)^{-3}}{-3}\right)+c\right]$$

veya

$$\frac{3}{y-\sin x}=-\frac{\left(1+\cos x\right)^{-1}}{\sin^2 x}+c\left(1+\cos x\right)^2$$

genel çözümü bulunur.

Soru 3: $y'=\dfrac{-4}{\sin x}+\left(3-\cot x\right)y+y^2\sin x$ **diferensiyel denkleminin bir özel çözümü** $y=\dfrac{1}{\sin x}$ ise genel çözümü bulunuz.

Çözüm: $y=\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{v}$ ve $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{v^2}\dfrac{dv}{dx}$ dönüşümünü uygulayalım. Bu durumda denklem

$$\frac{-\cos x}{\sin^2 x} - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = \frac{-4}{\sin x} + (3-\cot x)\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{v}\right) + \left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{v}\right)^2 \sin x$$

veya sağ taraf düzenlenirse

$$\frac{-\cos x}{\sin^2 x} - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = \frac{5}{v} - \frac{\cot x}{\sin x} - \frac{\cot x}{v} + \frac{\sin x}{v^2}$$

olur. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\frac{dv}{dx} + (5-\cot x)\, v = -\sin x$$

lineer diferensiyel denklemi elde edilir. $P(x) = 5 - \cot x$ ve $Q(x) = -\sin x$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
v &= e^{-\int(5-\cot x)dx}\left[\int(-\sin x)\, e^{\int(5-\cot x)dx}dx + c\right] \\
v &= e^{-5x+\ln|\sin x|}\left[\int(-\sin x)\, e^{5x-\ln|\sin x|}dx + c\right] \\
v &= \sin x e^{-5x}\left[\int -e^{5x}dx + c\right] \\
v &= \sin x e^{-5x}\left[-\frac{e^{5x}}{5} + c\right]
\end{aligned}$$

ve $v = \dfrac{\sin x}{y\sin x - 1}$ olduğu gözönüne alnırsa

$$\frac{1}{y\sin x - 1} = -\frac{1}{5} + ce^{-5x}$$

genel çözümü elde edilir.

Eğri ailelerinin yörüngelerinin denkleminin bulunması

Soru 1 : $2xyy' = y^2 - x^2$ **diferensiyel denkleminin integral eğrilerinin ortogonal yörüngelerinin denklemini bulunuz.**

Çözüm : y' yerine $-\dfrac{1}{y'}$ yazalım. Bu durumda, $2xy = \left(x^2 - y^2\right) y'$ homojen diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin her tarafı x^2 ile bölünürse

$$2\frac{y}{x} = \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)\frac{dy}{dx}$$

olur. $\dfrac{y}{x} = u$, $\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} 2u &= \left(1 - u^2\right)\left(u + x\frac{du}{dx}\right) \\ 2u &= u + x\frac{du}{dx} - u^3 - xu^2\frac{du}{dx} \\ u^3 + u &= x\left(1 - u^2\right)\frac{du}{dx} \\ \frac{dx}{x} &= \frac{\left(1 - u^2\right)du}{u^3 + u} \end{aligned}$$

ayrılabilir diferensiyel denklem elde edilir.

$$\frac{1 - u^2}{u^3 + u} = \frac{A}{u} + \frac{Bu + C}{u^2 + 1} = \frac{u^2\left(A + B\right) + Cu + A}{u^3 + u}$$

eşitliğinden $C = 0$, $A = 1$ ve $B = -2$ olduğu görülür. Dolayısıyla

$$\int \frac{\left(1 - u^2\right)du}{u^3 + u} = \int \frac{du}{u} - \int \frac{2udu}{u^2 + 1} = \ln|u| - \ln\left|u^2 + 1\right| = \ln\left|\frac{u}{u^2 + 1}\right|$$

olur. Böylece diferensiyel denklemin genel çözümü

$$\ln|x| + \ln|c| = \ln\left|\frac{u}{u^2 + 1}\right| \text{ veya } cx = \frac{u}{u^2 + 1} \text{ 'dir.}$$

Ayrıca, $\dfrac{y}{x} = u$ olduğundan genel çözüm $c\left(y^2 + x^2\right) = y$ olarak bulunur.

Soru 2 : **Kutupsal koordinatlarda verilen** $r^2 = 2c^2\cos 2\theta$ **lemniskat ailesinin ortogonal yörüngelerinin denklemini bulunuz.**

Çözüm : Öncelikle $r^2 = 2c^2\cos 2\theta$ denkleminden sabit sayıyı yok ederek bu eğri ailesinin diferensiyel denklemini oluşturalım. bunun için türev alırsak,

$$2rr' = -4c^2 \sin 2\theta \text{ ve } c^2 = -\frac{rr'}{2\sin 2\theta}$$

ifadesi $r^2 = 2c^2 \cos 2\theta$ denkleminde yerine yazılırsa,

$$r = -\frac{r'}{\sin 2\theta} \cos 2\theta$$

veya

$$\frac{r'}{r} = \frac{-\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Kutupsal koordinatlarda verilen eğrilerin ortogonal yörüngelerinin denklemini bulmak için r' yerine $\frac{-r^2}{r'}$ yazılır. O halde

$$\begin{aligned}
\frac{-r^2}{rr'} &= -\tan 2\theta \\
\frac{r}{r'} &= \tan 2\theta \\
\frac{dr}{r} &= \cot 2\theta d\theta \\
2\ln|r| &= \ln|\sin 2\theta| + 2\ln|c| \\
r^2 &= c^2 \sin 2\theta
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki dik koordinatlarda verilen eğri ailelerinin ortogonal yörüngelerinin diferensiel denklemlerini bulunuz.

a) $y^2 = cx^3$
b) $x = ce^{y^2}$
c) $x^2 - y^2 = cx$
d) $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$
e) $y = c_1 (\sec x + \tan x)$

2. Aşağıdaki kutupsal koordinatlarda verilen eğri ailelerinin ortogonal yörüngelerinin diferensiel denklemlerini bulunuz.

a) $r = a(1 + \cos\theta)$
b) $r = a\cos^2\theta$
c) $r^2 = a\sin 2\theta$
d) $r^2 \cos 2\theta = c_1$
e) $r = a\left(1 + \sin^2\theta\right)$

Cevaplar

1. a) $2x^2 + 3y^2 = m^2$
b) $y = c_1 e^{-x^2}$
c) $y\left(y^2 + 3x^2\right) = c_1$
d) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = b\left(2x^2 + y^2\right)$
e) $y^2 = 2\left(c_2 - \sin x\right)$
2. a) $r = b\left(1 - \cos\theta\right)$
b) $r^2 = b\sin\theta$
c) $r^2 = b\cos 2\theta$
d) $r^2 \sin 2\theta = c_2$
e) $r^2 = b\cos\theta\cot\theta$

Clairaut Diferensiyel Denklemi

Soru : $y = xy' + (y')^2 - 2y' + 1$ diferensiyel denklemini çözünüz.
Çözüm : $y' = p$ yazılırsa,

$$y = xp + p^2 - 2p + 1 = xp + (p-1)^2 \qquad (*)$$

olur. Türev alınırsa

$$p = p + xp' + 2(p-1)p'$$
$$p'[x + 2(p-1)] = 0$$

olur.
i) $p' = 0$ ise $p = c$ olur Bu $(*)$ da yerine yazılırsa,

$$y = cx + (c-1)^2$$

doğru ailesi bulunur. (Genel çözüm)
ii) $[x + 2(p-1)] = 0$ ise $x = 2(1-p)$ ifadesi $(*)$ 'da yerine yazılırsa

$$y = 2p(1-p) + (p-1)^2 = -p^2 + 1$$

olur. $\left.\begin{array}{c} x = 2(1-p) \\ y = -p^2 + 1 \end{array}\right\}$ denklemlerinden p yok edilerek

$$(x-2)^2 + 4(y-1) = 0$$

parabol ailesi bulunur. (Tekil çözüm)

Devam Edecek